# NÚMEROS COMPLEXOS
## Contextualização histórica e sua abordagem no Ensino Médio

Robson Cabral Severo [1], Israel Costa Smith de Medeiros[2] e Valdson de Araújo Pessoa[3]

**RESUMO**

Este trabalho tem como objetivo apresentar o contexto histórico do surgimento dos números complexos com base na historiografia matemática, identificando os principais personagens que contribuíram para o seu desenvolvimento e aceitação bem como tal conteúdo é trabalhado no ensino médio sob um ponto de vista prático e teórico. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica com base na seleção minuciosa de trabalhos disponíveis na literatura. Os resultados desta pesquisa revelam que um dos motivos pelos quais os números complexos não são trabalhados de forma adequada é pelo fato de que tal assunto não é um tópico exigido no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Também se constatou que o uso de recursos computacionais em sala de aula pode contribuir, de forma positiva, para o entendimento dos números complexos e o significado geométrico de suas operações.

**Palavras-chave**: Ensino; História da Matemática; Historiografia; Números complexos.

1 Bacharel em Matemática. Aluno de Mestrado - IMECC/Unicamp. E-mail: robsoncabral.ifrn2014@gmail.com.

2 Licenciado em Matemática. Aluno de Mestrado - PPGMAE/UFRN. E-mail: israelsmith2014@gmail.com.

3 Mestrado profissional em Gestão de Processos Institucionais. Bacharelando em Matemática - UFRN. E-mail: valdsonpessoa@gmail.com.

# COMPLEX NUMBERS
# Historical contextualization and its approach in High School


## ABSTRACT

This paper aims to present the historical context of the emergence of complex numbers based on mathematical historiography, identifying the main characters who contributed to their development and acceptance, as well as how such content is worked on in high school from a practical and theoretical point of view. This is a bibliographical research based on a meticulous selection of papers available in the literature. The results of this research reveal that one of the reasons why complex numbers are not adequately covered is because this subject is not a required topic in the Brazilian High School National Examination (called ENEM). It was also found that the use of computational resources in the classroom can positively contribute to the understanding of complex numbers and the geometric meaning of their operations.


Keywords: Teaching; History of Mathematics; Historiography; Complex numbers.

## INTRODUÇÃO

Números complexos sempre foi um assunto que despertou várias curiosidades entre alunos e professores. As principais indagações por parte dos alunos se dão no fato das aplicações de tais números e como eles surgiram. A ideia, muitas vezes exposta por alunos do ensino médio, é de que os números complexos são apenas uma mera ampliação dos conjuntos dos números reais, o que torna possível a resolução de equações quadráticas que até então "não possuiam solução" quando estudadas no ensino fundamental (PINTO JÚNIOR, 2009).

É de extrema importância que qualquer objeto matemático, quando apresentado em sala de aula, seja tratado do ponto de vista histórico com o intuito de localizar o aluno no tempo (PORTOLAN, 2017). A falta do contexto histórico pode causar, nos alunos, a sensação de que os objetos estudados não possuem importância uma vez que não se fala de seu desenvolvimento tão pouco sobre suas aplicações em situações concretas.

Em se tratando dos números complexos, sabe-se que não é um assunto cobrado pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (PINTO JÚNIOR, 2009). E pode-se inferir que esse seja mais um motivo pelo qual alguns professores não trabalham tal conteúdo ou o abordam de forma bastante superficial. No entanto, a falta de conhecimento sobre os números complexos pode causar prejuízo aos futuros universitários que por ventura venham a atuar nas ciências exatas ou áreas afins, uma vez que se espera que esses alunos já tenham adquirido algum conhecimento acerca do assunto.

No processo evolutivo da matemática surgem os números negativos os quais foram reprimidos e houve um tempo significativo para serem aceitos pelos matemáticos da época (PORTOLAN, 2017). Ainda assim, quando tais números apareciam em certos problemas, admitia-se que eles não possuíam

solução. De fato, isto é verdade levando-se em consideração que muitas das questões eram de cunho geométrico.

Posteriormente, surge a necessidade de realizar operações com números negativos, dentre elas a radiciação. Segundo Araújo (2006, p. 24 *apud* PORTOLAN, 2017, p. 18) "(...) conforme historiadores da matemática, o primeiro exemplo de radical de número negativo foi publicado, aproximadamente, em 75 d.C. por Heron de Alexandria num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide (...)".

Diante disso, o presente trabalho busca descrever o desenvolvimento histórico dos números complexos enfocando, também, sua abordagem no ensino médio e propondo formas para apresentar tal objeto matemático em sala de aula com base, por exemplo, na historiografia e o uso de recursos computacionais visando proporcionar no aluno uma inquietação sobre os números complexos, suas origens e aplicações. Tudo isso, visando evitar o pensamento errôneo de que tais números possuem somente a função de ampliar o número de equações quadráticas que podem ser resolvidas.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A base para a descoberta dos números complexos, diferente do que a maioria das pessoas pode imaginar, não está relacionada com as equações do segundo grau, mas sim com a resolução de equações cúbicas.

Segundo Rosa (1998, p. 41), as equações do segundo grau apareceram na matemática aproximadamente 1700 a.C. nas tabuletas de argila da Suméria, e em alguns casos levaram às raízes quadradas de números negativos. Porém, não foram elas em nenhum momento que vieram a sugerir o uso dos números imaginários.

Segundo Portolan (2017, p. 19), as equações quadráticas com origem na matemática grega, eram encontradas através de investigações geométricas que usavam círculos e parábolas, no entanto algumas soluções não eram possíveis através de construções geométricas com régua e compasso, o que caracterizava a inexistência de solução de equações quadráticas. Os matemáticos árabes não admitiam soluções não reais para tais equações, pois herdaram dos gregos a necessidade de justificar a veracidade de seus métodos algébricos por meio da geometria.

Assim, a ideia de que os números complexos surgiram para justificar um problema identificado, por exemplo, na equação , não procede, uma vez que, nesses casos, apenas considerava-se não haver solução ou número real que pudesse satisfazer a sentença.

No período Renascentista na Europa, em 1487, o frade italiano Luca Pacioli (1445-1514) publicou a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, considerada a primeira obra impressa de álgebra. Segundo Boyer (1996, p. 191), Pacioli julgava que equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente.

Outro matemático, Scipione Del Ferro (1465-1526), contrariamente às previsões de Pacioli, resolveu o caso especial da cúbica , com  e  números positivos. Sem publicar seus resultados, divulgou-os a um pequeno grupo de amigos no qual estava incluído seu aprendiz Antônio Maria Fior (PINTO JÚNIOR, 2009, p. 13).

Com essa importante descoberta, outro grande matemático italiano, Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia devido aos seus problemas de gagueira, conseguiu resolver equações cúbicas.

Neste momento da história, Antônio Maria Fior propõe, publicamente, um desafio à Tartaglia, que objetivava a resolução de algumas equações cúbicas. Tem-se aí o relato de uma das mais famosas disputas na história da

matemática envolvendo a resolução de equações do terceiro grau (PINTO JÚNIOR, 2009, p. 13).

Desta disputa, Tartaglia saiu vencedor ao conseguir resolver todos os problemas propostos por seu adversário. Sabendo da notícia do triunfo de Tartaglia, o matemático Italiano Girolamo Cardano (1501-1576) teria solicitado a Tartaglia a solução das equações cúbicas. Após a recusa de Tartaglia, Girolamo Cardano, com muita insistência, conseguiu obter a fórmula prometendo-lhe segredo.

Quebrando o juramento que havia feito, Girolamo Cardano fez publicar em sua obra intitulada *Ars Magna*, em 1545, a fórmula revelada por Tartaglia. Apesar dos protestos de Tartaglia com relação à autoria, Cardano acrescenta que "independentemente e trinta anos antes, Scipione del Ferro havia chegado aos mesmos resultados" (GARBI, 2010, p. 37 apud QUEIROZ, 2016, p. 33).

Para Queiroz (2016, p. 33),

> A publicação do *Ars Magna*, por Girolamo Cardano em 1545 foi um passo fundamental para o desenvolvimento da resolução de equações do 3º grau e consequentemente o impulso para o surgimento dos Números Complexos, especialmente pela abordagem em resolução de equações cúbicas e quárticas. (QUEIROZ, 2016, p. 33).

Boyer (1996, p. 193) assevera que "um progresso tão notável e imprevisto causou tal impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 frequentemente é tomado como o marco onde se iniciou o período moderno na matemática".

A seguir tem-se a fórmula (Equação 1) apresentada por Girolamo Cardano, inicialmente concebida por Tartaglia, para a resolução de equações cúbicas do tipo ,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (1)$$

Entretanto, surge um dilema: ao aplicar a fórmula na equação $x^3 - 15x - 4$, obtém-se como resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Porém Girolamo Cardano sabia que $x = 4$ também era solução da equação, ou seja, era preciso superar o "problema" relativo às raízes quadradas de números negativos.

Cardano não conseguiu resolver esse problema e coube a Raphael Bombelli (1526-1573), outro matemático italiano, dar o passo seguinte. A grande contribuição de Bombelli para a matemática é conhecida através da publicação de sua obra *L'Algebra* (1572), escrita por volta do ano de 1560.

Camargo e Vriesman (2012), ainda destacam:

> Como na época não era aceita a raiz de números negativos, Bombelli utilizou *-121* como ferramenta de cálculo no qual se propunha determinar os números e positivos. Após alguns desenvolvimentos algébricos, concluía que *a=2*, *b=1* e *x=4*. Para obter este resultado utilizou o símbolo que hoje é denominada a parte imaginária, como se pode perceber ao longo da história. (CAMARGO; VRIESMAN, 2012).

Ao falar de Bombelli, Pinto Júnior (2009, p. 25) assinala que:

> Os números imaginários são abordados em seu primeiro livro, juntamente com definições de conceitos elementares, como potências, raízes, binômios e as operações que os envolvem. Ele reconhece a existência das raízes negativas e segue adiante afirmando que estas expressões são mais "sofisticadas" que reais. (PINTO JÚNIOR, 2009, p. 25).

A partir de então, surgem outros matemáticos que contribuíram para a construção da teoria e de uma possível representação do que se entende

hoje por números complexos.

O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard (1590-1633) na obra *Invention nouvelle en l'algèbre*, quando enuncia claramente as relações entre raízes e coeficientes de uma equação. Em 1637, os termos "real" e "imaginário" foram empregados pela primeira vez por René Descartes (1596-1650). O símbolo "*i*" foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler (1707-1783) em 1777 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1801, responsável pela utilização da expressão "números complexos" (ROSA, 1998, p. 53).

Rosa (1998, p. 53) ainda conta que "a primeira tentativa de atribuir um significado concreto aos números complexos através de uma interpretação geométrica é devida a John Wallis (1616-1703)". Queiroz (2016, p. 44) também destaca que Wallis "contribuiu fortemente para a aceitação dos números complexos".

Segundo Portolan (2017, p. 23), em 1797, Gaspar Wessel trabalhou com os números complexos em sua forma geométrica, de maneira a estabelecer uma relação biunívoca entre os pontos e o plano, porém foi publicada apenas em 1806 por Jean Argand, no qual atualmente recebe os méritos pela representação.

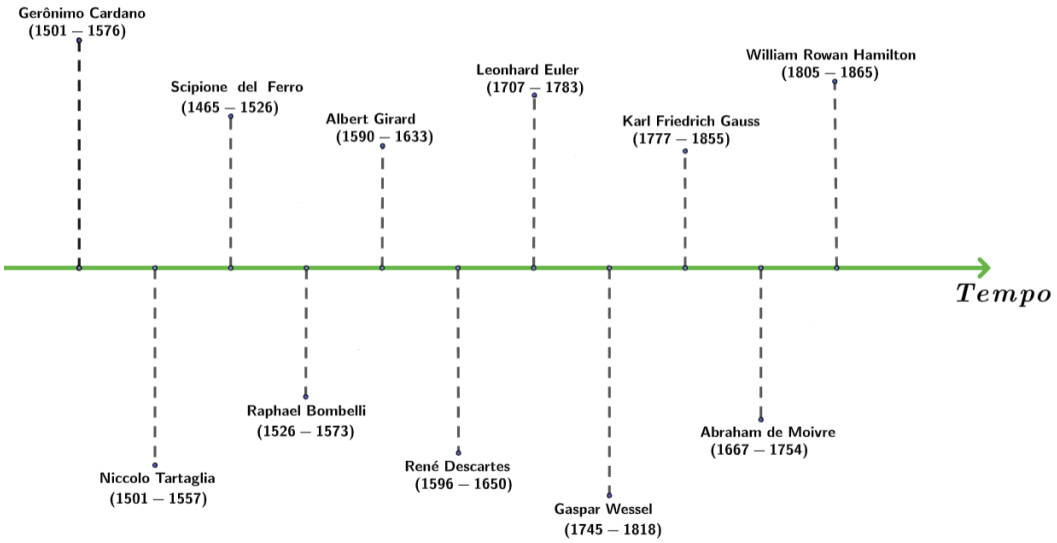
A contribuição de Gauss encontra-se numa memória apresentada à Sociedade Real De Gottingen em 1831. Através dele, a representação geométrica dos números complexos foi finalmente aceita. Foi o primeiro matemático de grande renome a defender os números imaginários em público. E ele mesmo já conhecia a representação gráfica de tais números embasada pelo seu conhecimento em relação à demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra (CHAGAS, 2013 *apud* PORTOLAN, 2017, p. 23).

Outra figura importante foi William Rowan Hamilton (1805-1865) que, em 1833, introduziu uma álgebra formal de pares de números complexos

cujas regras de combinação são precisamente as que hoje são dadas para os números imaginários. Trata-se do conceito definitivo de número complexo como um par ordenado de números reais, ideia que estava indicada nas representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss, mas que agora eram explicitadas pela primeira vez (BOYER, 1996, p. 404).

A Figura 1 apresenta, resumidamente, em forma de linha do tempo, os principais matemáticos que desenvolveram os conceitos relacionados aos números complexos.

Figura 1 – Principais matemáticos relacionados com os números complexos.




Fonte: Elaboração dos autores.

Todas as contribuições de importantes matemáticos, através da descoberta e compreensão de números para além dos reais, foram fundamentais para a evolução da matemática em outras áreas até então inexploradas ou de alcance limitado. O ceticismo envolvido no início contribuiu fortemente na busca de provas da sua existência e utilidade, bem como solidificou a estrutura conceitual desse importante tópico da

matemática.

A matemática sempre foi tida como uma ciência abstrata e uma das questões mais frequentes entre alunos e professores é como torná-la mais concreta, isto é, aplicável aos problemas do cotidiano. No entanto, nas palavras de Roque (2012):

> É verdade que a matemática lida com conceitos que não parecem corresponder à experiência sensível, caso dos números negativos, irracionais ou complexos. Mesmo os conceitos geométricos básicos de ponto e reta são abstratos uma vez que não se tem, no mundo real, grandezas sem dimensão, ou com somente uma dimensão. (ROQUE, 2012, p. 31).

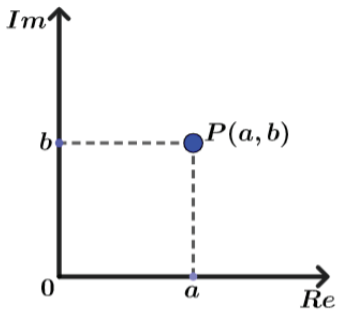
No entanto, nos dias atuais é cada vez maior a busca por formas de mostrar que as ferramentas matemáticas estão presentes na vida dos alunos, ou seja, mostrar que os assuntos estudados não se restringem somente à sala de aula. Uma dessas formas são as aplicações de certos conteúdos matemáticos em situações práticas do dia a dia e até mesmo em outras áreas do conhecimento científico que aparentemente não possuem relação com a matemática.

Em se tratando dos números complexos pode-se citar exemplos de aplicações dos mesmos na engenharia em estudo de circuitos elétricos, na corrente e na tensão elétrica, na potência, na impedância, na equação de onda que rege o movimento dos elétrons, na equação de normalização, que tem um papel importante na mecânica quântica, entre outras aplicações (SILVA, 2011).

No que concerne ao ensino médio, a grande maioria dos livros didáticos começam com uma pequena motivação a respeito das equações quadráticas o que, como já foi visto, não possui relação com o surgimento dos números imaginários. Em seguida a tão conhecida expressão $z = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, chamada de forma algébrica de um número complexo, é exposta sem nenhuma justificativa para o leitor.

A Figura 2 é chamada plano complexo ou Plano de Argand-Gauss[4] e é exposta nos livros didáticos como sendo uma forma de representação geométrica de um número complexo. Alguns livros trazem notas fazendo menção aos seus criadores. No entanto, cabe ao professor fazer uma maior exploração sobre tal representação e transitar nas demais representações: algébrica, vetorial, gráfica e trigonométrica (AMORIM; OLIVEIRA, 2016).

Figura 2 – Plano de Argand-Gauss.




Fonte: Elaboração dos autores.

Diante do exposto acima, vale ressaltar a importância do professor para que o aluno não seja forçado a interiorizar apenas conceitos prontos e sem qualquer justificativa. O uso de recursos computacionais vem proporcionando ótimas experiências para alunos e professores no ensino de ciências. Em se tratando dos números complexos, tais recursos possibilitam a compreensão da geometria por trás de suas operações, como observado em Amorim e Oliveira (2016). Queiroz (2016, p. 53) afirma que "o objeto de reflexão não se dá pela não aceitação de aprendizagem, mas tão somente o intuito de promover inquietações acerca do tema".

4 Em homenagem aos seus criadores: o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e o guarda livros suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

## METODOLOGIA

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa básica, exploratória e de cunho bibliográfico. Dessa forma, foi feita uma revisão bibliográfica minuciosa buscando embasar a proposta deste artigo. O objetivo é revelar ao leitor a existência de trabalhos que tratam sobre o tema em questão bem como apresentar ideias que possibilitem formas alternativas de trabalhar com os números complexos e com isso pode facilitar a formação do professor e contribuir para a aprendizagem dos alunos. Para Gil (2008) *apud* Portolan (2017, p. 60):

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Esta vantagem se torna particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. (GIL, 2008, p. 50 *apud* PORTOLAN, 2017, p. 60).

Nesta pesquisa também foi estudado acerca de como os números complexos são trabalhados, muitas vezes, de forma insuficiente e até prejudicial aos estudantes.

Como o contexto histórico dos números complexos é o foco principal deste trabalho, buscou-se dar ênfase em como a historiografia da matemática pode contribuir para alcançar os objetivos em sala de aula que, nesse caso, é uma melhor compreensão dos números complexos e algumas de suas aplicações. Tudo isso, aliada à utilização de recursos computacionais como por exemplo, o *software* GeoGebra, visando contribuir para alcançar o objetivo desejado.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao longo deste trabalho foi possível perceber o quanto alguns conteúdos matemáticos necessitam serem mais bem trabalhados em sala de aula de um ponto de vista histórico e prático. Através do contato com pesquisas de alguns autores, percebeu-se que tal prática deve ser abordada, também, nos cursos de graduação tendo vista que é necessária cada vez mais a capacitação dos novos professores sejam de matemática ou áreas correlatas.

Percebe-se que muitos conteúdos matemáticos, em particular os números complexos, podem ser melhor compreendidos e, mais ainda, que a história da matemática possui papel decisivo nesse trabalho.

Faz parte desse contexto, elucidar o mito de que os números complexos surgiram pela necessidade de resolver equações do segundo grau que não possuem solução no conjunto dos números reais. Também mostrar para o aluno que os números complexos são uma ferramenta matemática e, sendo assim, possuem aplicações práticas. Por exemplo, ao editar uma imagem no computador, o aluno está inconscientemente trabalhando com números complexos.

Com os números complexos, o aluno terá contato com diversos conceitos novos tais como unidade imaginária, plano complexo, fórmulas de Moivre, conjugado, forma polar, entre outros. Cabe ao professor bem preparado e que teve um bom contato com os números complexos em sua graduação, fazer uso de certas práticas pedagógicas visando uma melhor compreensão deste assunto.

Na Figura 3, pode-se inferir um dos resultados principais desta pesquisa, ou seja, os números complexos não são trabalhados ou são tratados de forma inadequada está ligado ao fato de que esse assunto não é cobrado

em alguns vestibulares do Brasil, destacando aqui, o ENEM que é o mais conhecido no país. E com isso, alguns professores acabam não trabalhando ou trabalham de forma inadequada, o que acaba por desmotivar os alunos a estudar e conhecer a importância dos números imaginários.

Figura 3 – Conteúdo de números complexos nos documentos oficiais e programas de acesso à universidade.

| Documentos e Universidades Pesquisadas | Números Complexos |
|---|---|
| PCN | Contempla |
| DCE | Contempla |
| ENEM | Não Contempla |
| UEL | Contempla |
| UEPG | Contempla |
| UNIOESTE | Contempla |
| UNICENTRO | Contempla |
| UFPR | Contempla |
| UEM | Contempla |
| UTFPR | Não Contempla |
| UNILA | Não Contempla |

Fonte: Portolan (2017, p. 49).

Outro fator de grande impacto na compreensão dos números complexos bem como o entendimento geométrico que está por trás de suas operações é a falta de utilização de recursos computacionais como *softwares* e aplicativos que possam promover uma visualização gráfica do que acontece quando se faz uma operação de soma ou multiplicação entre tais números.

Um exemplo de recurso computacional que pode auxiliar é o *software* GeoGebra que, como citado anteriormente, vem proporcionando ótimas experiências em sala de aula para alunos e professores (). Aqui, deu-se preferência pelo programa GeoGebra em virtude de ser gratuito e de fácil manipulação, possuindo, também, versão para dispositivos móveis.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os números complexos, bem como os demais objetos matemáticos estudados ao longo do ensino médio, têm por objetivo fornecer ao aluno as bases para uma futura carreira acadêmica seja ela qual for.

A partir do presente trabalho, buscou-se contribuir para uma maior disseminação do conhecimento matemático entre alunos, professores e pesquisadores. Espera-se ter ficado claro para o leitor sobre a importância de se utilizar da história aliada aos recursos computacionais para mediar certos assuntos que fazem parte da grade curricular do ensino médio em particular os números complexos e, desta forma, proporcionar uma aula mais prazerosa tanto para o aluno como para o professor sobre determinada ferramenta matemática.

## REFERÊNCIAS

AMORIM, T. M.; OLIVEIRA, P. C. O software Geogebra: uma ferramenta para o ensino dos números complexos. **Encontro Nacional de Educação Matemática**, v. 12, 2016.

BOYER, C. B. História da Matemática, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. **Gomide. Hist. Matemática, São Paulo: Blücher**, 1996.

CAMARGO, M. V. S. P.; VRIESMAN, T. C. **A evolução dos números complexos: história e aplicações.** 2012. Disponível em: <http//tcconline.utp.br/wpcontent/uploads/2012/08/A-EVOLUCAO-DOSNUMEROS-COMPLEXOS-HISTORIA-E-APLICACOES.PDF>. Acesso em: 17 abr. 2019.

JÚNIOR, U. P. A História dos Números Complexos: “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”, 2009.

PORTOLAN, J. et al. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

QUEIROZ, P. A. S. Uma proposta metodológica para o ensino dos números complexos: história e prática, 2016.

ROQUE, T. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA VISÃO CRÍTICA, DESFAZENDO MITOS E LENDAS.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, M. S. **NÚMEROS COMPLEXOS: “Uma Abordagem Histórica Para a Aquisição do Conceito”.** 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SILVA, M. A. Da teoria à prática: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos números complexos e suas aplicações. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, p.79-91, jan. 2011. Disponível em: SBHC - Números Anteriores - Visualizar Revista. Acesso em: 23 abr. 2019.